受験番号 ________________

平成 28 年度東京大学大学院工学系研究科
システム創成学専攻 / 原子力国際専攻 / 技術経営戦略学専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成 27 年 8 月 31 日（月）13:00〜15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。
3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと。
4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ。
5. 計算用紙は別に配布する。試験終了後，回収する。
6. 問題は全部で 15 問ある。このうち任意の 12 問を選んで解答せよ。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけよ。
   13 問以上を選択することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

第１問

$(x+y+z)^8$ の展開式における x^4yz^3 の係数を求めよ。

第 2 問

2000 から 3000 までの間で 3600 と互いに素である整数はいくつあるか。

第 3 問

次式の値が実数となる実数xの最小値を求めよ。

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}$$

第 4 問

整数kを 2 乗すると，k^2の一の位が 5，十の位が 2 となる。このとき，k^2の百の位が取り得る数字を全て求めよ。ただし，kは 10 以上とする。

第 5 問

空間内に 3 点 $A(2,\ 3,\ 2)$，$B(5,\ 0,\ 5)$，$C(4,\ -5,\ 0)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A，B，C を通る平面を表す式を求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る円の中心座標を求めよ。

第 6 問

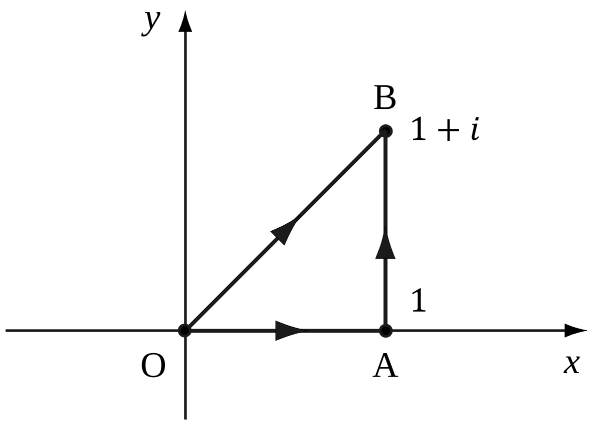
A，B，C の 3 者で試合を行う。1 試合目は A 対 B で行い，次の試合からは勝者が残りの 1 人と試合を行う。2 回連続して勝てば優勝であり，誰かが優勝するまで繰り返す。A，B，C いずれも勝つ確率が 5 割であるとする。

(1) 3 試合以内に優勝者が決まる確率を求めよ。

(2) 優勝者が決まるまでの試合数の期待値を求めよ。

第 7 問

複素変数$z = x + iy$の関数$f(z) = \bar{z} = x - iy$を考える。複素平面上の点 A を1，点 B を$1 + i$とし，以下の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。



(1)　関数$f(z)$を経路 OB に沿って O から B まで積分せよ。

(2)　関数$f(z)$を経路 OAB に沿って O から B まで積分せよ。

第 8 問

3 桁の整数 CBC と 2 桁の整数 AB の和が DBE になるとき，整数 DBE の最大値を求めよ。
A，B，C，D，E はそれぞれ異なる 1〜9 の整数である。

第 9 問

xy平面上に点P(x, y)を考える。点Pと定点 $(1, 0)$との距離が，点Pと直線$x = -1$との距離のa倍であるとき，以下の問いに答えよ。ただし，$a > 0$とする。

(1) 点Pの軌跡が放物線を描くとき，aの条件を求めよ。

(2) 点Pの軌跡が双曲線を描くとき，aの条件を求めよ。

第 10 問

直径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さを用いて円周率 π の近似値を求める。n の増加に伴い，その周の長さは単調増加で π に漸近する。π が 3.1 以上であることを示す最小の整数 n を求めよ。なお，以下の表の値を用いてよい。

n	$\cos(360°/n)$
7	0.623490
8	0.707107
9	0.766044
10	0.809017
11	0.841254
12	0.866025
13	0.885456
14	0.900969
15	0.913545

第 11 問

変数x_1，x_2，x_3に関する方程式

$$5{x_1}^2+6{x_2}^2+5{x_3}^2+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_3x_1=3$$

を，変数変換$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=U\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$により，

$$\alpha {X_1}^2+\beta {X_2}^2+\gamma {X_3}^2=1$$

に変換する。ここで，Uは直交行列，α，β，γは定数である。U，α，β，γを求めよ。

第 12 問

次の極限値を求めよ。ただし，x は自然数とする。

(1) $\lim_{x\to\infty}(2^{2x+1}+2^x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{x!}$

第 13 問

二つの球面 S_1: $x^2+y^2+z^2=1$ および S_2: $x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z=0$ が交わってできる円の面積を求めよ。

第 14 問

以下に示す掛け算の答えを求めよ。ただし，各アルファベットは 0 から 9 までの異なる整数を表している。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & A & B & C & A & B \\
\times & & & & & A & D & E & D & A \\
\hline
 & & & & F & F & F & F & F & F \\
 & & & G & G & G & G & G & G & \\
 & & A & A & A & A & A & A & & \\
 & G & G & G & G & G & G & & & \\
F & F & F & F & F & F & & & & \\
\hline
F & A & D & H & E & E & H & D & A & F
\end{array}
$$

第 15 問

次の定積分を計算せよ。ただし，aは正の定数とする。

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx$$