受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿

平成 27 年度東京大学大学院工学系研究科
システム創成学専攻 / 原子力国際専攻 / 技術経営戦略学専攻
入学試験問題および解答用紙

「論理的思考能力を見るための数理的問題」

平成 26 年 8 月 25 日（月）13:00〜15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。

2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること。

3. このページの最上部の欄に受験番号を記入せよ。それ以外の箇所に受験番号，氏名を書かないこと。

4. それぞれの問題の下に道筋を含む解答を記入せよ。

5. 計算用紙は別に配布する。試験終了後，回収する。

6. 問題は全部で 20 問ある。このうち任意の 15 問を選んで解答せよ。
   選択した問題について，下の選択問題番号欄に○をつけよ。
   16 問以上を選択することはできないので注意すること。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第１問

以下の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix}$$

第 2 問

平面 $2x+2y+z=2$ が，座標軸と交わる点を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする。このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}-2z\boldsymbol{k}$ の S に関する法線面積分を求めよ。ただし，$\boldsymbol{i}$ = (1,0,0)，$\boldsymbol{k}$ = (0,0,1)とする。

第 3 問

以下のようにxとyがそれぞれ媒介変数t によって表されるとき，点$P(x, y)$の軌跡の方程式を求めよ。

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1 + t^2} \end{cases}$$

第 4 問

行列 A と任意のゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$ であることを示せ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第 5 問

高さが無限大の三角柱がある。その三角柱の 3 本の稜線は，それぞれ(0,0,0)，(3,0,0)，(2,1,0)を通り，z 軸に平行な直線とする。この三角柱の側面と 2 つの平面 $z=2x+3y+6$ と $z=2x+7y+8$ で囲まれる空間の体積を求めよ。

第 6 問

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1)　A の固有値を求めよ。

(2)　$A^n = A^{n-2} + A^2 - I \quad (n \geqq 3)$　であることを示せ。

　　ここで I は単位行列とする。

(3)　A^{200} を求めよ。

第 7 問

複素平面 $z = x + iy$ から複素平面 $w = u + iv$ への写像を考える。

$w = \dfrac{1}{z+1}$ のとき，z 上の直線 $y = x$ の w 上への写像を求めよ。

第 8 問

以下の数列の第 15 項までの和を求めよ。

1+1, 2+3+4+9, 8+27+16+81+32+243, ・・・

第 9 問

L-O-N-D-O-N が「MMZ-MAZ-MMA-ZMM-MAZ-MMA」,
B-E-R-L-I-N が「ZZA-ZMA-AZZ-MMZ-MZZ-MMA」とそれぞれ表現される暗号を使って,
P-A-R-I-S を表現せよ。

第 10 問

(1) 3 次元空間の原点を通る直線を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t$ とする。 $\boldsymbol{a}$ は 3×1 ベクトル，t は任意の実数である。ある点 $\boldsymbol{b}$ をこの直線上に射影した点（距離が最も近い点）を $\boldsymbol{p}$ とする。$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の式で表せ。

(2) 3 次元空間の原点を通る平面を $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s}$ とする。A は 3×2 行列，$\boldsymbol{s}$ は任意の 2×1 ベクトルである。ある点 $\boldsymbol{b}$ をこの平面上に射影した点（距離が最も近い点）を $\boldsymbol{p}$ とする。$\boldsymbol{p}$ を A と $\boldsymbol{b}$ の式で表せ。

第 11 問

kを 2 以上の整数として，次の微分方程式

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left[1-\frac{2}{r}-\frac{k(k+1)}{r^2}\right]f=0 \quad (r \geqq 0)$$

の解を，$r=0$近傍でテイラー展開すると

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n$$

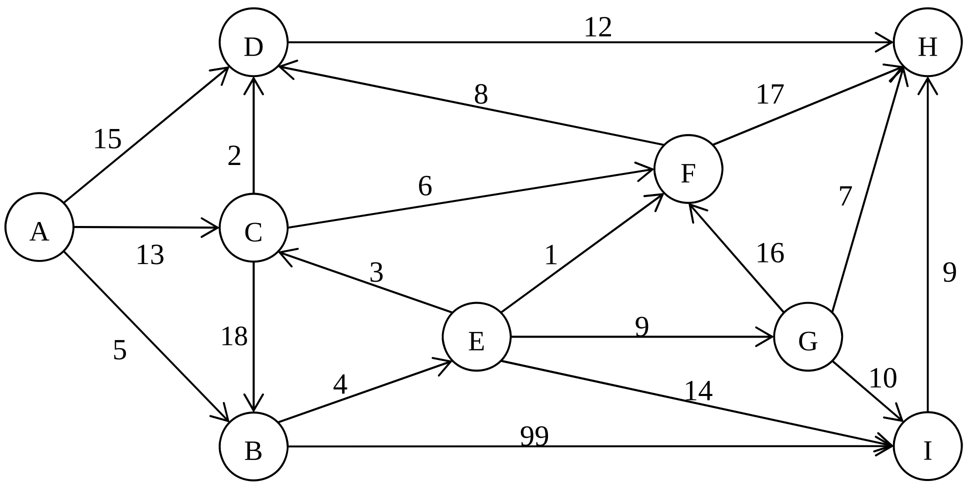
である。以下の問いに答えよ。ただし，$c_{k+1}=1$とする。

(1)　c_kを求めよ。

(2)　c_{k+2}を求めよ。

第 12 問

下図に示す有向グラフにおいて，頂点 A から各頂点までの最短経路の距離と，最短経路における直前の頂点を求め，下表を埋めよ。ただし，辺の傍の数字は距離を示す。



頂点	A からの距離	直前の頂点
B	5	A
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		

第 13 問

下図のようにある規則に従って数字が並んでいる。“A”に入る数字は何か？　理由を示して述べよ。

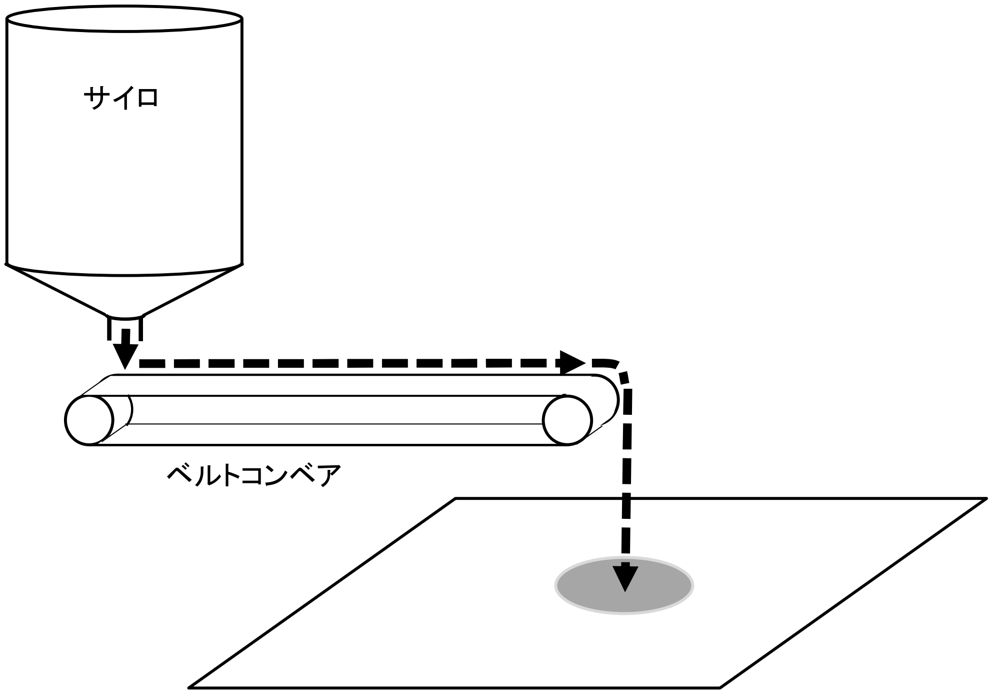
			A			
		57		54		
	73		94		63	
83		77		59		36

第 14 問

153 は各桁の 3 乗の和も 153 となる。すなわち，$1^3+5^3+3^3$ である。370 も同様の性質をもつ。これら 2 つを除き，同様の性質をもち，各桁の数字がすべて異なる 500 以下の 3 桁の自然数を 2 つ求めよ。

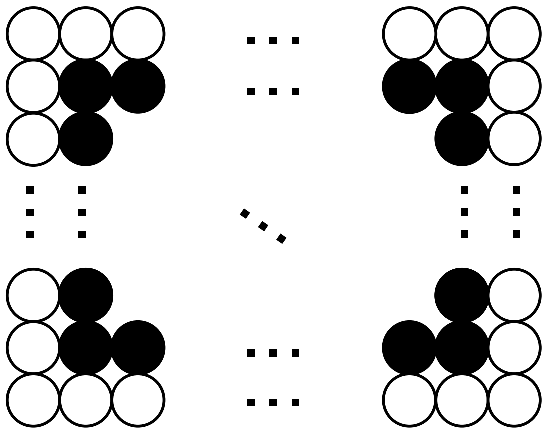
第 15 問

下図のようにサイロからベルトコンベアにより連続的に運搬された小麦は，平らな地面の上に円錐状に集積していく。小麦が運搬される速度は一定で 12 m^3/min とする。円錐の高さが 3 m のとき，円錐の高さの増加率（m/min）を求めよ。ただし，常に円錐の高さが底面の半径の半分となるものとする。また，円周率は π とする。



第 16 問

下図のように黒色の碁石を長方形状に並べ，白石をその黒石の周りを囲むように並べたところ，ちょうど白石の数は黒石の数の２倍になった。それぞれの碁石の個数を求めよ。



第 17 問

何人かの泥棒 (A, B, C, …) がグループで宝石商を襲い，同じダイヤモンドを 72 個奪った。グループでダイヤモンドを分配したい。まず，泥棒 A が他の泥棒に分配案を提案する。この提案に対して，提案者を含むすべての泥棒の半数以上が賛成すれば，その提案は受け入れられる。ただし，過半数が反対すれば，泥棒 A はグループから追放される。泥棒 A が追放された場合，泥棒 B が次に分配案を提案する。その提案に対して，提案者を含むすべてのグループに残っている泥棒の半数以上が賛成すれば，その提案は受け入れられ，さもなければ泥棒 B は追放される。泥棒 B も追放された場合は，泥棒 C が提案するというように続く。泥棒が分配案を提案したり，提案に対して賛成・反対を表明したりする場合は，追放されず自分の最終的な分配数が最大になるようにする。また，泥棒たちは，自分自身の賛成・反対にかかわらず最終的に自分への分配数が同じであり追放されない場合，ランダムに賛成・反対を決める。なお，泥棒たちは，他の泥棒も必ず同じ考え方をすることを知っているものとする。また，追放された場合，ダイヤモンドは受けとれない。

(1) 泥棒グループが 3 人（A, B, C）の場合，A は最大何個のダイヤモンドを得ることが可能か。また，その時の A の提案の内容を示せ。

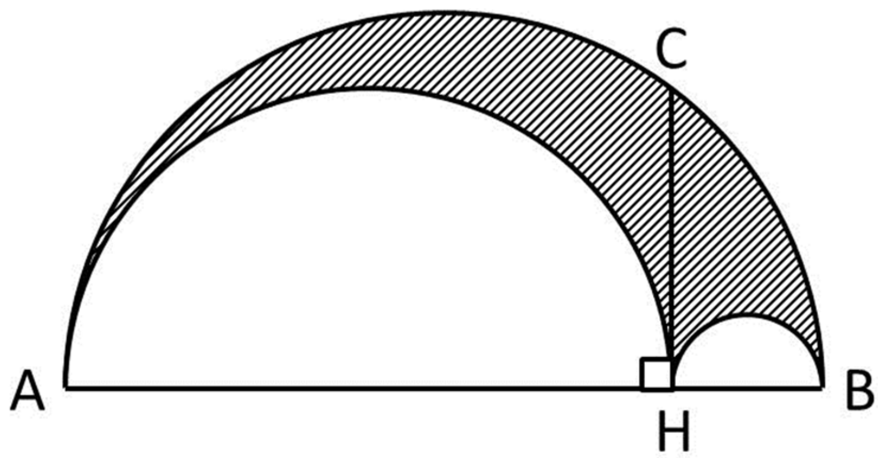
(2) 泥棒グループが 9 人（A, B, C, D, E, F, G, H, I）の場合，A は最大何個のダイヤモンドを得ることが可能か。また，その時の A の提案の内容を示せ。

第 18 問

右のポケットに 1 円玉 3 枚と 10 円玉 4 枚，左のポケットに 1 円玉 2 枚と 50 円玉 1 枚が入っている。左右どちらかのポケットを無作為に選び，選んだポケットから無作為に硬貨を 1 枚取り出す。その硬貨が 1 円玉であるとき，それが右のポケットから取り出された確率を求めよ。

第 19 問

下図のように 3 つの半円がある。AB に垂直な線分 CH の長さが 4 cm のとき，斜線の部分の面積を求めよ。ただし，円周率を π とする。



第 20 問

カウンター形式のバーに，下図のように 7 つの席（①，②，③，④，⑤，⑥，⑦）が並んでいる。このバーに客が一人ずつ合計 7 人訪れ，最後にすべての席が埋まると考える。客は席を等確率で選ぶとする。客は，可能な限り，すでに埋まっている席の隣には座らない。

また，客は，来店時に両隣に人がいない席に座れたときに満足となり，すでに埋まっている席の隣にしか座れない場合は不満足となる。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦

以下の問いに答えよ。

(1) 満足な客が不満足な客より多くなるような着席順は全部で何通りあるか。

(2) 着席順は全部で何通りあるか。

(3) 最初の客が①の席に座る場合，無作為に座る場合と比較して，満足な客は何人増えると期待できるか。